

801-15
2409
О 40/531
НЕ КОПИРОВАТЬ

ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

ДВАЖДЫ ДВА — ПЯТЬ!

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ

Составил Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЛЕНИНГРАД — 1939

ОГЛАВЛЕНИЕ

39-6385

Отв. редактор *В. А. Камский* Техн. редактор *А. Г. Жуков*

Ленгорлит № 5473 ³/₄ п. л. Тир. 100.000
Сдано в набор 23/XI-38 г. Подписано к печ. 19/XII-38 г.
Тип. „Нов. печ.", Ленинград, Лештуков, 4. Заказ 669

Эта книжечка предназначена, главным образом, для тех, кто уже знаком с начатками алгебры. Цель ее — приучить к осторожности при выполнении алгебраических вычислений и предостеречь от ошибок, довольно распространенных среди начинающих изучать математику. Книжечка может быть полезна для школьников, для обучающихся на рабфаках и в техникумах, а также для лиц, занимающихся самообразованием.

I.

$$2 \times 2 = 5$$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО“

$$144 - 64 = 180 - 100$$
$$64 - 144 = 100 - 180$$
$$64 - 144 + 81 = 100 - 180 + 81$$
$$8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 + 9^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9^2$$
$$(8 - 9)^2 = (10 - 9)^2$$
$$8 - 9 = 10 - 9$$
$$8 = 10$$
$$4 = 5$$

$$\underline{2 \times 2 = 5}$$

В чем ошибка?

II.

$$2 = 3$$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО“

Пусть $x = 1$, $y = 2$;
тогда

$$y = 2x$$
$$y + 4x = 6x$$
$$y + 4x - 3y = 6x - 3y$$
$$4x - 2y = 6x - 3y$$
$$2(2x - y) = 3(2x - y)$$

$$\underline{2 = 3}$$

В чем ошибка?

III.

$$3 = 7$$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО“

$$30 - 9 = 70 - 49$$

$$9 - 30 = 49 - 70$$

$$9 - 30 + 25 = 49 - 70 + 25$$

$$9 - 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2 = 49 - 2 \cdot 7 \cdot 5 + 5^2$$

$$(3 - 5)^2 = (7 - 5)^2$$

$$3 - 5 = 7 - 5$$

$$\underline{3 = 7}$$

В чем ошибка?

IV.

$$2 = 1$$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО“

В равенстве

$$x = 1$$

умножим обе части на x:

$$x^2 = x$$

От обеих частей отнимаем по 1:

$$x^2 - 1 = x - 1$$

Делим обе части на x — 1:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1},$$

откуда

$$x + 1 = 1$$

Подставив

$$x = 1,$$

получаем

$$1 + 1 = 1$$

$$\underline{2 = 1}$$

В чем ошибка?

V.

$3 = 5$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО"

Пусть $x = 1\frac{1}{2}$;

тогда

$$6x - 9 = 10x - 15$$

Отсюда

$$3\,(2x - 3) = 5\,(2x - 3),$$

и следовательно, после сокращения на $2x - 3$

$$3 = 5$$

В чем ошибка?

VI.

$10 = 11$

Как в 10-ти комнатах разместить 11 человек, по одному в каждой комнате?

Нужно 11-го человека поместить временно в первую комнату, а затем размещать остальных по одному в каждую комнату. Тогда в первой комнате окажется 2 человека. 3-го человека вселяем во вторую комнату, 4-го—в третью, 5-го—в четвертую и т. д. до 10-го человека, которому будет отведена 9-я комната:

2 чел.	3-й чел.	4-й чел.	5-й чел.	6-й чел.	7-й чел.	8-й чел.	9-й чел.	10-й чел.	

В десятую комнату, оставшуюся, как видите, свободной, можно теперь перевести из первой комнаты 11-го человека. Тогда все 11 человек будут размещены в 10 комнатах, и в каждой окажется по одному человеку.

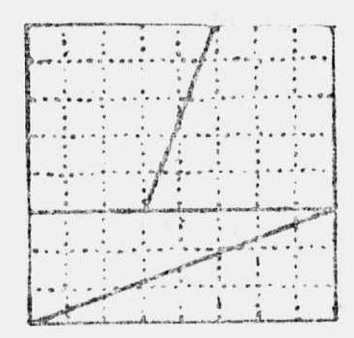
Но как может 10 равняться 11?

В чем ошибка?

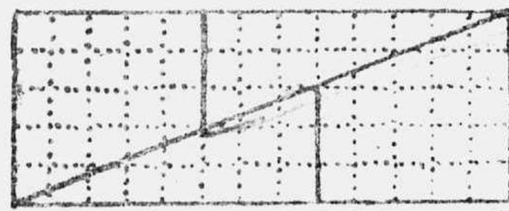
VII.

$$8 \times 8 = 65$$

Квадрат, разграфленный на 8×8 клеток, разрежем как здесь показано:



Из полученных четырех частей составим прямоугольник:



В нем, как видим, 5×13, т. е. 65 клеток. Значит,

$$8 \times 8 = 65$$

Как мог появиться лишний квадратик?

В чем ошибка?

VIII.

$$1 = \frac{1}{2} = 0$$

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО"

Безконечный ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

обозначим через x. Тогда

$$x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
$$x = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$$
$$x = 1 - x$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Итак, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$

Мы получим, однако, другой результат, если сгруппируем члены ряда так:

$$x = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$
$$= 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

При иной группировке будем иметь

$$x = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots =$$
$$= 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$$

Итак, $\frac{1}{2} = 0 = 1$

В чем ошибка?

IX.

Все числа равны друг другу

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем два произвольных числа a и b, причем $a > b$. Разность их обозначим через c:

$$a - b = c,$$

откуда

$$a = b + c$$

Обе части последнего равенства умножим на $a - b$:

$$a(a - b) = (b + c)(a - b)$$
$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$
$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

$$\underline{a = b}$$

В чем ошибка?

X.

Положительное число меньше нуля

„ДОКАЗАТЕЛЬСТВО“

Возьмем два положительных числа a и b, причем

$$a > b$$

Обе части неравенства умножим на $b - a$

$$a(b - a) > b(b - a)$$
$$ab - a^2 > b^2 - ab$$
$$0 > a^2 - 2ab + b^2$$
$$0 > (a - b)^2$$

Но $(a - b)^2$, т. е. квадрат вещественного числа, есть число положительное. Следовательно, ноль больше положительного числа.

В чем ошибка?

ОТВЕТЫ

Каждое из предложенных „доказательств" заключает только **одну** ошибку.

I. Ошибка в том месте „доказательства", где из равенства

$$(8-9)^2 = (10-9)^2$$

делается вывод, будто

$$8-9 = 10-9$$

Такое заключение незаконно:

$1^2 = (-1)^2$, но 1 не равна минус 1

II. Так как $2x - y = 0$, то в ходе „доказательства" обе части равенства были разделены на ноль, чего делать нельзя.

III. Ошибка такого же рода, как и в софизме I.

IV. Та же ошибка, что в софизме II.

V. Ошибка та же, что и в предыдущем случае.

VI. Второй человек остался без комнаты: он был при распределении комнат пропущен.

VII. Части разрезанного квадрата при составлении из них прямоугольника прилегают одна к другой не вплотную: остается непокрытым небольшой участок. В этом нетрудно убедиться практически, аккуратно вырезав фигуры в большом масштабе. Теоретически же доказывается это средствами тригонометрии.

VIII. Заключение в скобки нельзя безоговорочно применять к бесконечному числу слагаемых: прием этот безусловно приложим лишь к конечному числу слагаемых. Кроме того, нельзя вообще производить над x какие либо математические действия, не удостоверившись предварительно в том, что x есть определенное конечное число. Предложенный ряд предела не имеет.

IX. Так как $a - b - c = 0$, то из равенства $a(a-b-c) = b(a-b-c)$ нельзя делать вывод, будто $a = b$: мы незаконно делим здесь обе части равенства на ноль.

X. Если $a > b$, то $b - a$ число отрицательное. При умножении же неравенства на отрицательное число необходимо менять знак неравенства на обратный, чего в предложенном „доказательстве" сделано не было.

ЧТО ЧИТАТЬ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СОФИЗМАХ

1. *Брадис и Харчева.* Ошибки в математических рассуждениях. 1938.

2. *Литцман и Трир.* Где ошибка? 1920 и 1923.

3. *Лямин.* Математические парадоксы и интересные задачи. 1911.

4. *Больцано.* Парадоксы бесконечного. 1911.

5. *Горячев и Воронец.* Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики. 1903.

6. *Обреимов.* Математические софизмы. 1884 и 1889.